अनुक्रमां

नाम ...f ....

034781

131

324(JD)

P034781

2025

गणित

[पूर्णांक : 100

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :
i) इस प्रश्नपत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं।

ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) यदि फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित है तब f है

i) एकैकी व आच्छादक ii) बहुएक व आच्छादक
iii) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं iv) न तो एकैकी और न आच्छादक 1

ख) यदि $X = \{a, b, c\}$ तथा $Y = \{1, 2, 3\}$ और f प्रतिचित्रण इस प्रकार दिया गया है कि $f(a)=2$, $f(b)=3$, तथा $f(c)=1$, तो

i) $f(X) \subset Y$ ii) $f(X) = Y$ iii) $f(X) \supset Y$ iv) इनमें से सभी 1

ग) यदि $\int \log x \, dx = x \log x + k(x) + c$ तो

i) $k(x) = \log x$ ii) $k(x) = -\log x$ iii) $k(x) = -x$ iv) $k(x) = -x^2$ 1

घ) पाँच कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है

i) 0 ii) 4 iii) 3 iv) 5 1

ङ) सदिश फलन $\vec{f}(t) = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5t^2\hat{k}$ की प्रवणता $t = 2$ पर होगी

i) $20\hat{k}$ ii) $10\hat{k}$ iii) $5\hat{k}$ iv) $12\hat{k}$ 1

1. Attempt *all* the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book :

a) If the function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined as $f(x) = 3x$ then f is

i) one-one and onto ii) many-one and onto
iii) one-one but not onto iv) neither one-one nor onto 1

b) If $X = \{a, b, c\}$ and $Y = \{1, 2, 3\}$ and the mapping f is given by $f(a)=2$, $f(b)=3$, $f(c)=1$, then

i) $f(X) \subset Y$ ii) $f(X) = Y$ iii) $f(X) \supset Y$ iv) All of these 1

c) If $\int \log x \, dx = x \log x + k(x) + c$ then

i) $k(x) = \log x$ ii) $k(x) = -\log x$ iii) $k(x) = -x$ iv) $k(x) = -x^2$ 1

d) The number of arbitrary constants in a general solution of a differential equation of fifth order is

i) 0 ii) 4 iii) 3 iv) 5 1

e) At $t = 2$, the slope of the vector function $\vec{f}(t) = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5t^2\hat{k}$ is

i) $20\hat{k}$ ii) $10\hat{k}$ iii) $5\hat{k}$ iv) $12\hat{k}$

2\. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध करें कि $\sin^{-1} x = \tan^{-1}[x/\sqrt{1-x^2}]$. 1

ख) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 1

ग) सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ और $\vec{b} = -2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ के योगफल की दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 1

घ) यदि $f:R \to R$ तथा $g:R \to R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित हैं तो gof ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि दो पासे एक साथ फेंके जाएँ, तो योगफल आठ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1

2\. Do *all* the parts of the following :

a) Prove that $\sin^{-1} x = \tan^{-1}[x/\sqrt{1-x^2}]$. 1

b) Find the unit vector along the vector $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$. 1

c) Find the direction-cosines of the sum of the vectors $\vec{a} = 3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ and $\vec{b} = -2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$. 1

d) If the functions $f:R \to R$ and $g:R \to R$ are defined as $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$ respectively then find gof. 1

e) If two dice are thrown together then find the probability of getting the sum eight. 1

3\. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $2\hat{i}+5\hat{j}$ हैं तो सरल रेखा AB की दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 2

ख) यदि सम्बन्ध R इस प्रकार प्रदत्त है कि $R = \{(4, 5), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$, तब $R^{-1} o R^{-1}$ ज्ञात कीजिए। 2

ग) वक्र निकाय $y = 2mx$ को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए। 2

घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 \end{bmatrix}$ तब सिद्ध कीजिए कि $|C| = 1$, जहाँ $C = (A')' . B$. 2

3. Do *all* the parts of the following :

a) If the position vectors of the points A and B are $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and $2\hat{i}+5\hat{j}$ respectively, then find the unit vector along the straight line AB. 2

b) If the relation R is given by

$R = \{(4, 5), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$, then find $R^{-1} o R^{-1}$. 2

c) Find the differential equation representing the family of curves $y = 2mx$. 2

d) If $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 \end{bmatrix}$, then prove that $|C| = 1$,

where $C = (A')' . B$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) बिन्दु (5, 2, – 4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

ख) स्टील की 6 m × 16 m की आयताकार चादर के प्रत्येक कोने से $2x$ m लम्बाई के वर्गों को काटकर ढक्कन रहित एक संदूक बनाई जाती है। इस प्रकार बने संदूक का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए। 2

ग) यदि A और B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0 \cdot 3$ और $P(B) = 0 \cdot 4$ तब $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए। 2

घ) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिन्दु $A(2, 2, 2)$, $B(2, 1, 3)$ तथा $C(3, 2, 1)$ हैं। 2

4. Do *all* the parts of the following :

a) Find the vector equation of a straight line passing through the point (5, 2, – 4) and parallel to the vector $3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$. 2

b) Without cover a box is formed by 6 m × 16 m rectangular steel sheet on cutting the squares of length $2x$ m from its each corner. Then find the maximum volume of the box. 2

c) Let A and B are independent events and $P(A) = 0 \cdot 3$ and $P(B) = 0 \cdot 4$; then find $P(B/A)$. 2

d) Find the area of a triangle whose vertices are $A(2, 2, 2)$, $B(2, 1, 3)$ and $C(3, 2, 1)$. 2

5. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि फलन $f:N \to Y$, $f(x)=4x+3$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $y=\{y \in N : y=4x+3$, $x \in N$ के लिए $\}$ है तो सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए। 5

ख) आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z=-50x+20y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत ज्ञात कीजिए : 5

$2x-y \geq -5$

$3x+y \geq 3$

$2x-3y \leq 12$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

ग) यदि A तथा B, n क्रम के दो आव्यूह हैं जो व्युत्क्रमणीय हैं तब सिद्ध करें कि $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 5

घ) दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ जब $\vec{a} \neq \vec{0}$ और $\vec{b} \neq \vec{0}$. 5

ङ) यदि $I=\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$, सिद्ध कीजिए कि $I=\frac{\pi}{12}$. 5

5. Do *all* parts of the following :

a) Let function $f:N \to Y$ is defined as $f(x)=4x+3$ where $y=\{y \in N : y=4x+3$ for $x \in N\}$. Prove that f is invertible, also find the inverse of the function f. 5

b) Find the minimum value of the objective function $Z=-50x+20y$ by graphical method under the following constraints : 5

$2x-y \geq -5$

$3x+y \geq 3$

$2x-3y \leq 12$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

c) If A and B are two matrices of order n which are invertible, then prove that $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 5

d) For the two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ when $\vec{a} \ne \vec{0}$ and $\vec{b} \ne \vec{0}$. 5

e) If $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$, then prove that $I = \frac{\pi}{12}$. 5

6. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{यदि } x \ne 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, सिद्ध कीजिए कि फलन f एक संतत फलन है। 5

ख) एक कार समय $t = 0$ पर बिन्दु P से चलना प्रारम्भ करके बिन्दु Q पर रुक जाती है। कार द्वारा t सेकण्ड में तय की गई दूरी, x मीटर में $x = t^2\left(3 - \frac{t}{2}\right)$ द्वारा प्रदत्त है। कार को Q तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात कीजिए और P तथा Q के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए। 5

ग) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

घ) यदि $y = \cos^{-1} x$ है तो दर्शाइए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$. 5

ङ) यदि x, y, z तीन स्वतन्त्र घटनाएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$$P(X \cap Y \cap Z) = P(X) \cdot P\left(\frac{Y}{X}\right) \cdot P\left(\frac{Z}{X \cap Y}\right).$$ 5

6. Do *all* the parts of the following :

a) If function f is defined as

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{if } x \ne 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

then prove that f is continuous. 5

b) A car is started to move from a point P at time $t = 0$ and is stopped at the point Q. The distance x metre covered by the car in t second is given by $x = t^2\left(3 - \frac{t}{2}\right)$. Find the time required by the car to reach at the point Q and also find the distance between P and Q. 5

c) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ 5

d) If $y = \cos^{-1} x$, then show that $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$. 5

e) If x, y, z are three independent events, then prove that

$$P(X \cap Y \cap Z) = P(X) \,.\, P\left(\frac{Y}{X}\right) \,.\, P\left(\frac{Z}{X \cap Y}\right).$$ 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$2x + 3y + 3z = 5$

$x - 2y + z = -4$

$3x - y - 2z = 3$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

7. Do any *one* part of the following :

a) For matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ show that $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$ and with the help of this find A^{-1}. 8

b) Solve the following system of equations by matrix method :

$2x + 3y + 3z = 5$

$x - 2y + z = -4$

$3x - y - 2z = 3$ 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) हल कीजिए : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 1}{2x + 2y + 3}$. 8

ख) हल कीजिए : $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$. 8

8. Do any *one* part of the following :

a) Solve : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 1}{2x + 2y + 3}$. 8

b) Solve : $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$. 8

9. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos 4x}{2}}\, dx = 1$.

ख) यदि $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$, तो I का मान ज्ञात कीजिए।

9. Do any *one* part of the following :

a) Prove that $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos 4x}{2}}\, dx = 1$.

b) If $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$, find the value of I.